BACK

Franz Haschkovitz, Dieter Angerer (Krems, Austria)

"Fachbereichsarbeit Verwendung von Derive"

FBA
Fachbereichsarbeit - Was ist das?

Sie gehört zur "Neuen Reifeprüfung" in Österreich, siehe folgende Skizze:

Die Neue Reifeprüfung
an
AHS (Allgemeinbildende höhere Schule)

FBA	D	F	M		K/S	K/S	K/S/FF	
	D	F	M		K/S	K/S	K/S FS	K/S
	D	F	M		K/S	K/S	K/S	K/S/VS
	D	F	M	US	K/S	K/S FS	K/S	
	D	F	M	US	K/S	K/S	K/S/VS	

Legende: **FBA = Fachbereichsarbeit** (Schriftliche Hausarbeit - Vorprüfung)

Schriftliche Klausur:
D = Deutsch
F = Fremdsprache
M = Mathematik
US = Unterschiedlich nach Schulform

Mündliche Prüfung:

K = Kernfrage
S = Spezialfrage
FF = Frage zur Fachbereichsarbeit
FS = Fächerübergreifende Schwerpunktprüfung
VS = Vertiefende Schwerpunktprüfung

Sie ist eine schriftliche Hausarbeit, welche zu einem oder zwei Gegenständen gehört. Wenn Schüler diese Form der Reifeprüfung wählen, können sie eine von vier schriftlichen Klausuren ersetzen; verpflichtend sind jedoch die Klausuren aus Deutsch, Fremdsprache und Mathematik. Die mündliche Prüfung ist in drei Gegenständen abzulegen, wobei der Gegenstand der Fachbereichsarbeit zu wählen ist. Bei dieser ist die FBA mit einem erklärten Umfeld Teil der Prüfung.

Zielsetzungen der FBA:

Schwerpunktartiges Erfassen von Sachverhalten und Problemen,
Exakte Beobachtung und Wahrnehmung,
Logisches und kritisches Denken, klare Begriffsbildung,
Differenziertes schriftliches Ausdrucksvermögen,
Anwenden von grundlegenden Arbeitstechniken,
Planvolles Arbeiten mit angemessener Zeiteinteilung,
Aufsuchen geeigneter Informationsquellen.

Zur Zeit ist diese Form der Reifeprüfung noch ein Schulversuch, ab dem Schuljahr 1992/93 ist eine Form der sogenannten Schwerpunktprüfung verpflichtend (siehe Skizze).

Wie kam es zur Fachbereichsarbeit?

Nun, am Ende der 7.Klasse kamen zwei Schüler mit dem Wunsch zu mir, eine Fachbereichsarbeit aus Mathematik schreiben zu wollen. Ich erklärte mich einverstanden, und wir besprachen mögliche Arbeitsthemen.
Der eine wünschte ein Thema zur Geschichte der Mathematik, der andere - Herr Dieter Angerer - eines im Zusammenhang mit Computersoftware. Nach einigen weiteren Gesprächen wurden die Themen fixiert:

"Historische Entwicklung mathematischer Begriffe unter Berücksichtigung des Unendlichen"

"Grundlagen der Infinitesimalrechnung und deren fächerübergreifende Anwendung unter Verwendung algebratauglicher Software".

Für die algebrataugliche Software "DERIVE" gibt es in Österreich für die AHS eine Generallizenz; DERIVE ist daher an jeder derartigen Schule verfügbar. So wurde die FBA unter Verwendung von DERIVE verfaßt. Dieses Programm wurde aber im Unterricht dieser Klasse nicht eingesetzt.

Nach einer Kurzeinführung hat sich Herr Angerer mit großem Engagement das Programm in seinen Grundzügen selbständig erarbeitet. Nebenbei sei erwähnt, daß beide Kandidaten auch eigenständig ein Textverarbeitungsprogramm erlernt haben, das auch die Verarbeitung von mathematischen Formeln und Symbolen erlaubt.
Abgabetermin für die Beurteilung war im Feber dieses Jahres.

Herr Angerer wird nun kurz über seine Arbeit, speziell über die Verwendung von DERIVE, berichten. Gesagt sei auch, daß Dieter ein sehr engagierter Schüler sowohl im Privaten (Judokämpfer) als auch im Gymnasium ist. Diese Woche hatte er die Klausurarbeiten aus Deutsch, Mathematik und Englisch zu verfassen. Deshalb konnte er auch bisher beim Symposium kaum anwesend sein.

Das Ziel der Fachbereichsarbeit "Grundlagen der Infinitesimalrechnung und deren fächerübergreifende Anwendung im Unterricht unter Verwendung algebratauglicher Software" war nach einer mathematischen Einführung in die Materie und Bedienungs- bzw. Anwendungshinweisen zu DERIVE die konkrete Erarbeitung und Lösung von Aufgaben aus verschiedenen Bereichen. Anknüpfend an diese Fachbereichsarbeit sollen einige Beispiele aufgezeigt werden. Ein Teil der exemplarischen Arbeiten stammt nicht unmittelbar aus der Arbeit selbst, sondern entstand bei der Erarbeitung der einzelnen Themengebiete. Sie sollen Grundprinzipien der Differential- und Integralrechnung erläutern und veranschaulichen. Der zweite Aufgabenteil hingegen ist ein Auszug konkret behandelter Berechnungen aus der Fachbereichsarbeit. Die Probleme stammen aus verschiedenen Sparten.

Bei der Aufgabenlösung wurde strengstes Augenmerk auf einen strukturierten Aufbau des Lösungsvorganges gelegt. Dies ist vor allem in Hinblick auf eine DERIVE-gerechte Gestaltung des Modells sinnvoll und notwendig. Die Erarbeitung einer Lösungsstrategie erfolgt im wesentlichen nach folgendem Schema:

1. Aufgabenstellung:

Der Text, in den das zu lösende Problem gekleidet ist, muß genauestens erfaßt werden, denn aus ihm wird der gesamte Lösungsweg entwickelt. Dabei ist eine Visualisierung bei geometrischen Aufgaben oftmals von Vorteil.

2. Modellbildung:

Der Text wird gewissermaßen in die mathematische Symbolsprache übersetzt. Dann wird eine allgemeine Lösungsstrategie erarbeitet. Dabei kann DERIVE schon wertvolle Dienste leisten, da es auch mit symbolischen Werten arbeiten kann und somit dem Benutzer oft umfangreiche Herleitungen erspart.

3. Numerische Modellösung:

Wenn das Modell an ein Ziel geführt hat, können die numerischen Werte einfach eingesetzt und die gesuchten Lösungen berechnet werden. Besonders vorteilhaft ist, daß Modifikationen der Parameter unmittelbar auf ihre Auswirkungen auf das Ergebnis überprüft werden können.

4. Modellverifikation:

Die errechneten Lösungen müssen noch auf ihre Korrektheit bzw.Relevanz in bezug auf die Aufgabenstellung getestet werden, um das Modell bei Bedarf zu modifizieren. DERIVE erleichtert dies durch die einfache Darstellbarkeit von Funktionsgraphen, aus deren Verlauf viel über das Ergebnis ausgesagt werden kann.

Der Einsatz von DERIVE in der Infinitesimalrechnung befreit den Anwender nicht etwa von der Notwendigkeit eines mathematischen Grundwissens. Vielmehr ist eine profunde Kenntnis der Zusammenhänge und der Umsetzung in die Symbolik von DERIVE erforderlich, um zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen. Das Programm erspart jedoch die rein operative numerische Rechenarbeit, die meist mühselig und zeitraubend ist. Deshalb kann DERIVE dazu beitragen, die Mathematik von ihrer attraktiven Seite zu präsentieren, nämlich der logischen Erarbeitung von Lösungsmodellen ohne langweilige Rechenarbeit.

Zwei einleitende Simulationsaufgaben - erste Beschäftigung mit DERIVE:

- Approximation von Kurventangenten durch Sekantenscharen
- Approximation von Flächeninhalten durch Rechtecksflächen

1: "SEKANTENSCHAREN AN KURVEN"

2: "copyright by Haschkovitz-Angerer, 1992"

3: $F(x) := \frac{1}{4} x^2 - 3$

4: "SEKANTE(p,z) berechnet eine lin. Fkt. für Sekante zw. p und z"

5: $\text{SEKANTE}(p, z) := \frac{F(z) - F(p)}{z - p} x + \left[F(p) - \frac{F(z) - F(p)}{z - p} p\right]$

6: "Nun wird ein Vektor von lin. Funktionen generiert,"

7: $\text{SEKANTENSCHAR}(a, b, l, n) := \text{VECTOR}\left[\text{SEKANTE}(a, k), k, b, l, \frac{l - b}{n}\right]$

8: "deren Schaubilder n Sekanten des Funktionsgraphen sind"

9: SEKANTENSCHAR (-3, 1, -5, 10)

$$10: \left[-\frac{x}{2}-\frac{9}{4}, -\frac{13x}{20}-\frac{27}{10}, -\frac{4x}{5}-\frac{63}{20}, -\frac{19x}{20}-\frac{18}{5},\right.$$

$$-\frac{11x}{10}-\frac{81}{20}, -\frac{5x}{4}-\frac{9}{2}, -\frac{7x}{5}-\frac{99}{20},$$

$$-\frac{31x}{20}-\frac{27}{5}, -\frac{17x}{10}-\frac{117}{20}, -\frac{37x}{20}-\frac{63}{10},$$

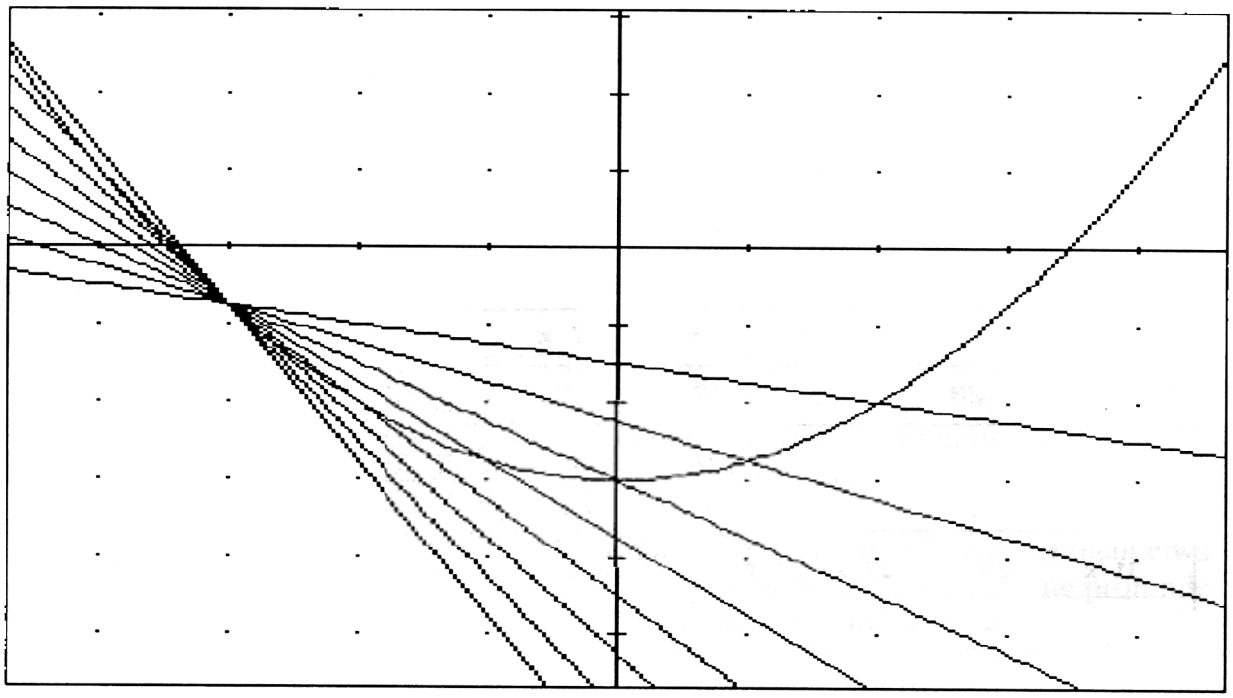
$$\left.-2x-\frac{27}{4}\right]$$

11: SEKANTENSCHAR (-3, 2, -5, 7)

$$12: \left[-\frac{x}{4}-\frac{3}{2}, -\frac{x}{2}-\frac{9}{4}, -\frac{3x}{4}-3, -x-\frac{15}{4}, -\frac{5x}{4}-\frac{9}{2},\right.$$

$$\left.-\frac{3x}{2}-\frac{21}{4}, -\frac{7x}{4}-6, -2x-\frac{27}{4}\right]$$

Das folgende Diagramm zeigt die grafische Auswertung.



1: "RECHTECKSSUMMENAPPROXIMATION"

2: "copyright (c) Haschkovitz-Angerer 1991"

3: "Zur Darstellung kleine Punkte und kontinuierlich wählen !"

4: $F(x) := -\frac{1}{5}x^2 + 3$

5: $T(x) := \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & F(x) \end{bmatrix}$

6: "R generiert Vektor der Rechteckseckpunkte"

7: $R(a, b, c, d) := \begin{bmatrix} a & b \\ c & b \\ c & d \\ a & d \\ a & b \end{bmatrix}$

8: "H entscheidet, ob der Funktionswert am Anfang"

9: "oder am Ende des Streifens gewählt wird"

10: $H(p, q) := \mathrm{IF}(F(p) < F(p + q), F(p), F(p + q))$

11: "Es werden die Nullstellen der Funktion berechnet"

12: $F(n) = 0$

13: $n = -\sqrt{15}$

14: $n = \sqrt{15}$

15: "Die Funktion U generiert einen Vektor von Rechteckspunkten"

16: "im Intervall a bis b mit n Streifen.(Untersumme)"

17: $M(a, b, n) := \dfrac{|b - a|}{n}$

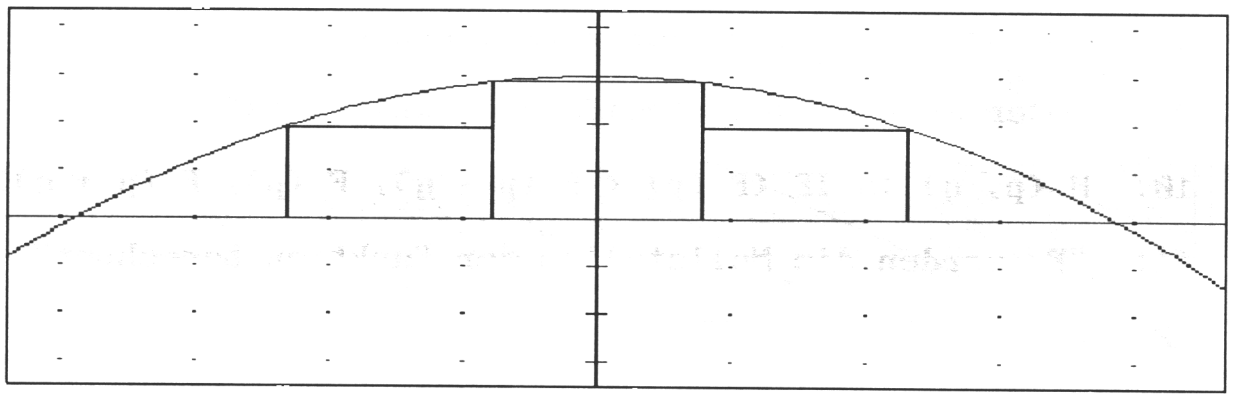
18: $U(a, b, n) := \mathrm{VECTOR}(R(k, 0, k + M(a, b, n), H(k, M(a, b, n))), k, a,$

$b - M(a, b, n), M(a, b, n))$

```
19:  "Nun wird die Fläche zwischen Graph und x-Achse durch Rechtecksflächen ange
```

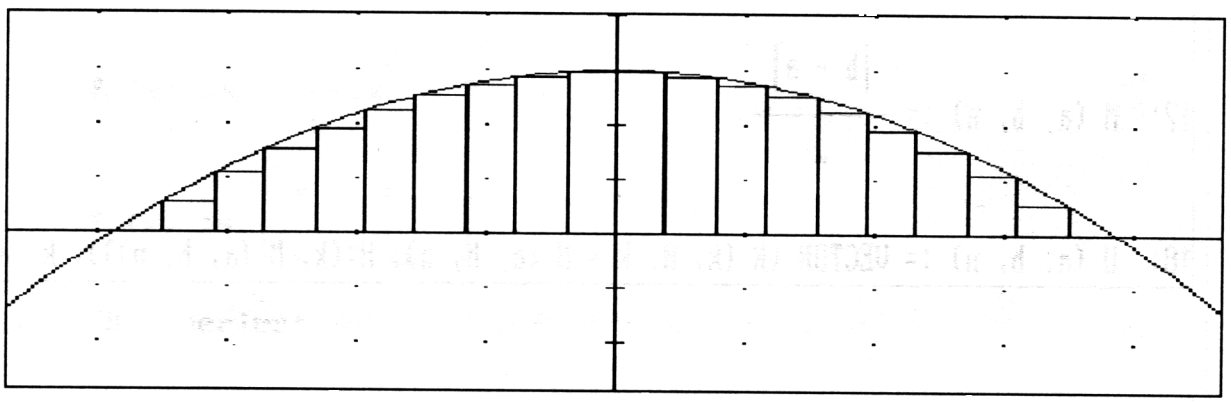
```
20:  "Zuerst durch fünf Streifen:"

21:  U (- √15, √15, 5)
```



```
23:  "Dann mit zwanzig:"

24:  U (- √15, √15, 20)
```



26: "Der Flächeninhalt soll auch berechnet werden:"

27: "Die Funktion REC_SUM berechnet die Summe der Rechtecksinhalte"

28: "im Intervall a bis b"

29: $\text{REC_SUM}(a, b, n) := M(a, b, n) \sum_{k=1}^{n} H(a + k\,M(a, b, n), M(a, b, n))$

30: "Berechnung mit ständiger Verfeinerung der Streifenbreite"

31: REC_SUM (- √15, √15, 5)

32: $\frac{13272}{2231}$

33: REC_SUM (- √15, √15, 40)

34: $\frac{57868}{3899}$

35: REC_SUM (- √15, √15, 80)

36: $\frac{27347}{1801}$

37: "Verfikation des Ergebnisses mit dem bestimmten Integral"

38: $\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} F(x)\,dx$

39: $\frac{35554}{2295}$

Zwei Anwendungsbeispiele aus der Fachbereichsarbeit:

Aufgabenstellung: Ein geladenes Teilchen (Ion) bewegt sich im Vakuum kräftefrei mit der Geschwindigkeit v_{x0} längs der x-Achse. Am Ort x_0 tritt es zur Zeit $t = 0$ in ein elektrisches Gegenfeld ein und bewegt sich mit der Beschleunigung $a_x = bt$ weiter.
a) Man leite eine Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v_x = v_x(t)$ für $t>0$ her!
b) Man leite eine Zeit-Ort-Funktion $x = x(t)$ für $t>0$ her!
c) Zu welcher Zeit ändert sich die Bewegungsrichtung?
d) Wo ist der Umkehrort x_u?
e) Das x(t) -, x'(t)- und x"(t)-Diagramm ist darzustellen!
Vorgegebene Größen: $x_0 := 3{,}0$ mm $\quad v_{x0} := 2{,}0$ km/s
$b := -0{,}75 \cdot 10^{15}$ m/s^2

Modellbildung:
ad a) Für $t>0$ hat das Ion die Beschleunigung $a_x(t) = bt$. Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion ist, kann umgekehrt durch Integration von $a_x(t)$ $v_x(t)$ berechnet werden.

```
1:   AX (t) := b t

2:   VX (t) := ∫ AX (t) dt
```

Da die Geschwindigkeit anfänglich nicht Null, sondern v_{x0} beträgt, muß dieser Wert als Integrationskonstante addiert werden.

$$3: \quad VX(t) := \frac{b\,t^2}{2} + vx0$$

Die Geschindigkeit-Zeit-Funktion ist somit eindeutig festgelegt.

ad b) Weiters gilt der Zusammenhang, daß die Ableitung der Ort-Zeit-Funktion die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ergibt. Aus der Integration als Umkehrung folgt also:

$$4: \quad X(t) := \int VX(t)\,dt$$

$$5: \quad X(t) := \frac{b\,t^3}{6} + t\,vx0$$

Die Bewegung ist aber nicht vom Ursprung, sondern vom Ort x_0 zu berechnen. Daher muß genau die Ort-Zeit-Funktion verwendet werden, die den Wert x_0 additiv angeschlossen hat. (Die Integrationskonstante ist also x_0).

$$6: \quad X(t) := \frac{b\,t^3}{6} + t\,vx0 + x0$$

Hiermit ist auch die Ort-Zeit-Funktion x(t) eindeutig definiert!

ad c) Durch die Einwirkung des Gegenfeldes kann sich das Ion nur bis zu einem bestimmten Ort weiter bewegen, bis das Kraftfeld eine Umkehrung bewirkt. Dies geschieht zu einem Zeitpunkt t_u. $x(t_u)$ ist als der maximale Weg, den das Ion zurücklegen kann, zu verstehen. Die Bedingung dafür ist x'(tu) = 0.

Weil $x'(t) = v_x(t)$ ist, gilt für das Extremum auch $x_x(t_u) = 0$.

$$7: \quad VX(tu) = 0$$

$$8: \quad \frac{b\,tu^2}{2} + vx0 = 0$$

Die Geschwindigkeit am Umkehrpunkt ist also 0, das Ion "steht still". Für t_u ergibt sich durch Lösung der Gleichung

$$9: \quad tu = -\sqrt{2}\,\sqrt{\left[-\frac{vx0}{b}\right]}$$

Dieser negative Wert für die Zeit kommt nicht in Frage.

$$10: \quad tu = \sqrt{2}\,\sqrt{\left[-\frac{vx0}{b}\right]}$$

ad d) Um den Umkehrort x_u zu erhalten, muß nur t_u in der Ort-Zeit-Funktion substituiert werden.

$$11: \quad xu := X(tu)$$

Dann erhält man

$$12: \quad xu := \frac{b\,tu^3}{6} + tu\,vx0 + x0$$

<u>Numerische Modellbildung:</u>

Die gegebenen Werte (Maßzahlen) werden nun eingesetzt. Das Modell arbeitet mit Maßzahlen, wenn die Zeit in s und der Weg in m gemessen wird. Die Angaben für v_{x0} und x_0 müssen daher umgeformt werden: $v_{x0} = 2.0 \cdot 10^3\ ms^{-1}$; $x_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ m

$$13: \quad vx0 := 2\ 10^3$$

$$14: \quad x0 := 3\ 10^{-3}$$

$$15: \quad b := -0.75\ 10^{15}$$

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ergibt sich daher

$$16:\quad VX(t) := 2000 - 3.75\ 10^{14}\ t^{2}$$

und die Zeit-Ort-Funktion lautet:

$$17:\quad X(t) := -1.25\ 10^{14}\ t^{3} + 2000\ t + 0.003$$

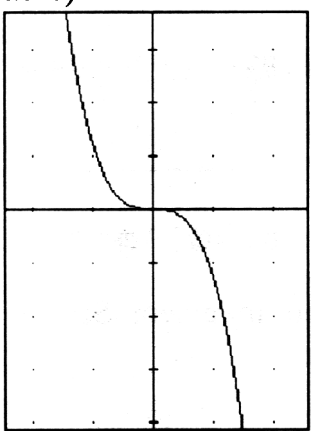
Der Umkehrzeitpunkt t_u beträgt

$$21:\quad tu = 2.3094\ 10^{-6}$$

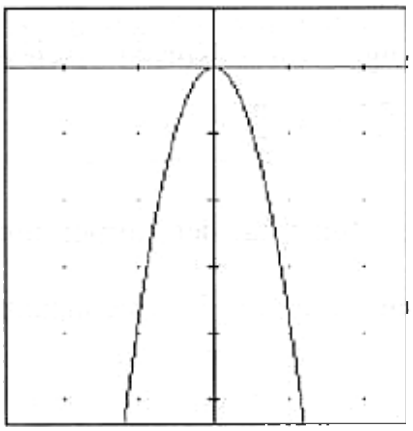
Daraus ergibt sich der Umkehrort x_u

$$25:\quad xu := 0.0060792$$

ad e)

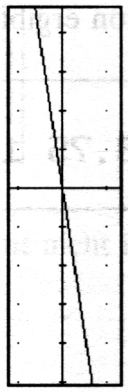


x-t-Diagramm



vx-t-Diagramm

ax-t-Diagramm



Lösungsverifikation:

Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion hat die Form

$v_x(t) := 2000 - 3.75 \cdot 10^{14}\ t^2$ und die Zeit Ort Funktion

$x(t) := -1.25 \cdot 10^{14}\ t^3 + 2000t + 0.003$ Das Ion wird durch das Gegenfeld nach rund 2,4 µs und nach rund 6,1 cm vom Ausgangspunkt weg umgekehrt.
Im $a_x(t)$-Diagramm ist erkennbar, daß die Bewegung des Ions vom Zeitpunkt $t = 0$ an linear gebremst wird. Folglich wird die Geschwindigkeit $v_x(t)$ immer geringer, bis sie am Umkehrort x_u gleich 0 ist. Der Umkehrort ist also das Extremum der Funktion x(t), was im x(t)-Schaubild ersichtlich ist. Nach der Umkehr bewegt sich das Teilchen, mit $-a_x$ beschleunigt, in die entgegengesetzte Orientierung.

Aufgabenstellung: Ein Körper schwingt harmonisch nach der Formel

$$s = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

a) Nach welcher Zeit t hat der Körper zum ersten Mal seinen größten Ausschlag erreicht?
b) Die Ort-Zeit- und die Beschleunigung-Zeit-Funktion sind in einem Schaubild darzustellen.

Modellbildung:

Die Schwingungsformel s ist eine Funkton der Zeit, s(t), und kann somit als solche deklariert werden.

$$1: \quad S(t) := \frac{1}{2} \, SIN\left[\frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{2}\right]$$

ad a) Die Frage nach dem größten Ausschlag bedeutet, daß die Weg-Zeit-Funktion s(t) an einer oder mehreren Stellen tm ein Maximum annimmt. Notwendige Bedingung für das Maximum ist, daß die erste Ableitung an einer konkreten Stelle gleich 0 ist.

$$2: \quad \frac{d}{dt} S(t) = 0$$

$$3: \quad -\frac{\pi \, SIN\left[\frac{2\pi t}{3}\right]}{3} = 0$$

Um zwischen Maximum und Minimum unterscheiden zu können, müssen die Lösungswerte in die zweite Ableitungsfunktion eingesetzt werden. Laut Angabe ist nur die erste Periode der Lösung relevant.

ad b) Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit. Daraus kann a(t) errechnet und für das Schaubild verwendet werden.

$$4: \quad A(t) := \left[\frac{d}{dt}\right]^2 S(t)$$

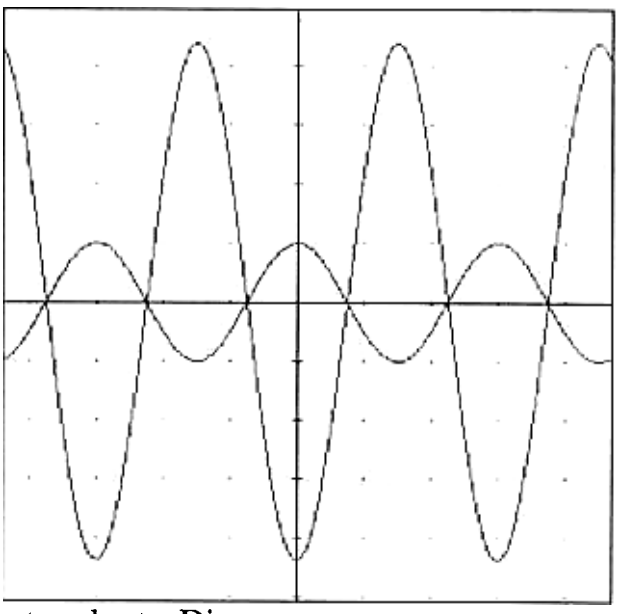
$$5: \quad A(t) := -\frac{2\pi^2 \, COS\left[\frac{2\pi t}{3}\right]}{9}$$

Numerische Modellösung:

ad a) Man erhält die Lösung für den ersten Periodendurchlauf der Schwingung.

```
6:    t = 0
```

ad b)



s-t und a-t - Diagramm

Lösungsverifikation:
Der harmonisch bewegte Körper hat zur Zeit 0 zum ersten Mal seinen größten Ausschlag. Für diese Aufgabe ist es irrelevant, ob ein Hoch-oder Tiefpunkt vorliegt, denn der Körper schwingt aus der Nullage beidseitig gleich aus. Aus dem Schaubild erkennt man, daß die Ort-Zeit-Funktion und die Funktion der Beschleunigung dieselben Nullstellen haben. Daraus kann man schließen, daß dieser harmonisch schwingende Massenpunkt nur in der Anfangslage unbeschleunigt ist.