BACK

Der Einsatz des Computeralgebrasystems DERIVE im Alltag eines AHS-Schülers

von Christian Meisl, BRG Hallein, Salzburg

I. Einleitung

In den letzten Jahrzehnten kam es zu einer sprunghaften Entwicklung bei den technischen Hilfsmitteln in den Naturwissenschaften, der auch am Schulunterricht nicht spurlos vorübergegangen ist. Arbeitete man vor einigen Jahren noch hauptsächlich mit Rechenschieber und Logarithmentafel, so ist der heutige Unterricht vor allem durch die Verwendung des Taschenrechners gekennzeichnet. Doch die Entwicklung blieb nicht beim Taschenrechner stehen. Parallel dazu finden schon heute immer mehr auch komplexere elektronische Hilfsmittel, im speziellen PCs, im Unterricht Verwendung.
Als Schüler, der diesen Trend zum computergestützten Unterricht in den Allgemeinbildenden Höheren Schulen quasi von Anfang an beobachten konnte, möchte ich im folgenden kurz meine persönlichen Anwendungsgebiete des Computers anhand des Algebrasystems DERIVE darstellen.

II. DERIVE

SOFTWARE IM UNTERRICHT

Betrachtet man die verschiedenen potentiellen Anwendungsgebiete des Computers in einer AHS, so ergeben sich vier Software-Typen, die primär Anwendung finden:

- Eine ***Textverarbeitung***, die zur computergestützten Verarbeitung von Mitschriften, Hausübungen, Referaten und ähnlichem dient,
- ein ***Grafik-System***, das neben der Erstellung von schematischen Darstellungen und Grafiken zur Auflockerung von Mitschriften respektive zur Verwendung von eingescannten Grafiken in Texten dient,

- ein vektororientiertes ***Geometriepaket***, das die computerunterstützte Konstruktion von Problemstellungen der Analytischen bzw. Darstellenden Geometrie ermöglicht und so vor allem in den naturwissenschaftlichen Zweigen der AHS Verwendung findet,
- sowie ein ***Computeralgebrasystem***, das nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der theoretischen Physik und Chemie Verwendung findet und das vor allem die Aufgabe erfüllt, den Zeitbedarf zum Lösen von Problemstellungen zu vermindern.

DAS COMPUTERALGEBRASYSTEM DERIVE IN DER VERSION 1.22

Als Repräsentant der letztgenannten Gruppe stand mir in den letzten zwei Jahren das Computeralgebrasystem DERIVE zur Verfügung. Da ich leider nur im Besitz der Version 1.22 bin, ergaben sich Probleme bei speziellen Problemstellungen, auf die ich aber später noch eingehen werde. Mit der unserer Schule zur Verfügung stehenden neueren Version von DERIVE gelang aber im Nachhinein auch die Lösung dieser Probleme.

Das Paket DERIVE deckt prinzipiell die vier großen Bereiche der AHS-Oberstufenmathematik ab, nämlich
- Vektorrechnung
- Analytische Geometrie
- Trigonometrie
- Differential-/Integralrechnung (Infinitesimalrechnung)

Dabei meint "prinzipiell", daß spezielle Aufgabenstellungen in der mir zur Verfügung stehenden Version 1.22 trotzdem nicht lösbar waren. Dazu gehört leider die zugegeben relativ einfache Aufgabe, den Graphen einer Funktion zu Papier zu bringen, da sich über den Umweg des Bildschirmhardcopies leider keine Ausgabe ergab, die meinen Standard bezüglich äußerer Form entsprach. Trotzdem hat mir das Paket in den letzten beiden Jahren wertvolle Dienste geleistet.

III. Derive als Kontrollmöglichkeit bei Hausübungen

Eine durchaus interessante Anwendungsmöglichkeit von DERIVE liegt im Lösen von Hausübungsbeispielen. Das ist zwar pädagogisch gesehen nicht gerade unbedenklich, aber schließlich bin ich Schüler und nicht Lehrer. Trotzdem habe ich mich zu dem Entschluß durchgerungen, daß der Sinn von Hausübungen nicht darin liegt, sie in den Computer einzutippen und die Ergebnisse in ein Heft zu übertragen, ohne dabei den Umweg über die Großhirnrinde zu gehen.
Verwendet man allerdings DERIVE als "Zweitwerkzeug", dann stellt es eine durchaus sinnvolle Anwendung dar.

Als Beispiel möchte ich im folgenden eine "typische" Mathematikaufgabe lösen: "Die Kurve mit der Gleichung $6y^2=(x+6)^3$ wird in den Punkten mit der Abszisse 0 von einem Kreis berührt, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt. Berechne den Flächeninhalt des von den beiden Kurven begrenzten Flächenstücks!"[1)]

(1) Ermitteln der Kreisgleichung:

$$6y^2 = (x+6)^3$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(x+6)^3}{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{(x+6)^3}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{(x+6)^3}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{x+6} \times 1 = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \sqrt{x+6}$$

Die Funktionsdaten an der Stelle 0 lassen sich durch Einsetzen bestimmen:

$$f(0) = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{6^3} = 6 \Rightarrow T(0/6)$$

$$f'(0) = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \sqrt{6} = \frac{3}{2}$$

Daraus lassen sich die Daten der Gerade und in weiterer Folge die Kreisdaten berechnen:

$$n:\ 2x + 3y = 18$$

$$2x_m = 18$$

$$x_m = 9$$

$$r = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$$

Kreis:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \Rightarrow (x-9)^2 + y^2 = 117$$

$$y = \pm\sqrt{117 - (x-9)^2}$$

---

1) LAUB, Josef (Hrg.); u.a.: *Lehrbuch der Mathematik: für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen*; Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1981; Band 4, S. 77, Bsp. 116

(2) Ermitteln der Integrationsgrenzen:

Kurve:

$f(x_0) = 0$

$\sqrt{(x_0 + 6)^3} = 0$

$x_0 + 6 = 0$

-6

Kreis:

$f(x_1 < 9) = 0$

$(x_1 - 9)^2 = 117$

$x_1 - 9 = -\sqrt{117}$

$x_1 = 9 - \sqrt{117} \approx -1{,}817$

(3) Integration der Kurven:

$$A = 2\left| \int_{-6}^{0} \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{(x-6)^3}\, dx - \int_{9-\sqrt{117}}^{0} \sqrt{117 - (x-9)^2}\, dx \right|$$

$$\int_{-6}^{0} \sqrt{(x+6)^3}\, dx = \left[\frac{(x+6)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-6}^{0} = \frac{72}{5}\sqrt{6}$$

$$\int_{-1{,}817}^{0} \sqrt{117 - (x-9)^2}\, dx = \int_{-10{,}817}^{-9} \sqrt{117 - z^2}\, dz =$$

$$17 \times \int_{-1{,}571}^{-0{,}983} (\cos t)^2\, dt = 117 \times \left[\frac{1}{2} \times (\sin t \times \cos t + t)\right]_{-1{,}571}^{-0{,}983} = 7{,}391$$

$$A = 2 \times \quad 72 \times \frac{\sqrt{6}}{5} - 7{,}391 \quad = 2 \times |\,35{,}277 - 7{,}391\,| = 55{,}772 \text{ (AE)}$$

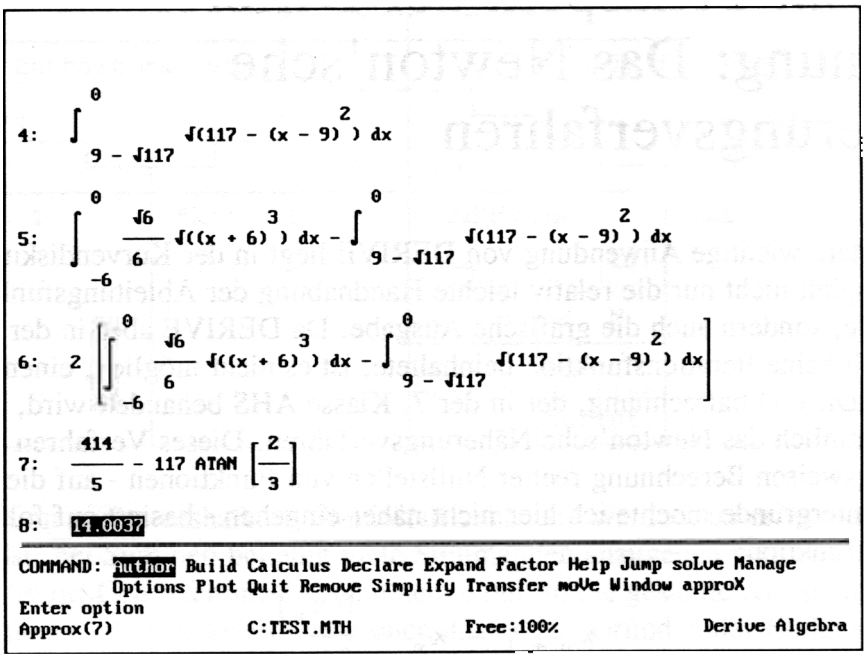
Diese Rechnung ist deshalb so "typisch" für ein Hausübungsbeispiel, weil sie falsch ist. Das Lösungsheft[2)] gibt nämlich einen Wert von 14,002 AE an. Selbst wenn man Rundungsfehler einbezieht, liegt der Wert zu weit von der richtigen Lösung entfernt (diese beträgt nur 25% des errechneten Wertes). Daher muß sich irgendwo in der Rechnung ein Rechenfehler befinden.
Die Überprüfung der Rechnung kann nun mittels DERIVE erfolgen. Sie gliedert sich in folgende Schritte:

(1) Überprüfen der Lösungsheft-Lösung:

Da sich auch ein Mathematiker irren kann, ist es sinnvoll, als erstes die Lösung des Lösungsheftes zu überprüfen. Dies ist in DERIVE sehr einfach durch Eingabe der Integrale und Approximation über "Approx" möglich:

(A)uthor
*SQRT(6)/6*SQRT((x+6)^3) <ENTER>*
(A)uthor
SQRT(117-(x-9)^2) <ENTER>
(C)alculus (I)ntegrate #1 <ENTER> <ENTER> -6 <TAB> 0 <ENTER>
(C)alculus (I)ntegrate #2 <ENTER> <ENTER> 9-sqrt(117) <TAB> <ENTER>
(B)uild #3 <ENTER> - <ENTER> <ENTER>
*(B)uild 2 <ENTER> * <ENTER> <ENTER>*
(S)implify Appro(x)

Nach Abarbeiten dieser Befehle liefert DERIVE folgende Ausgabe:



2) BREUNIG, Eva; u.a.: *Lösungen und Anleitungen zu Laub-Körperth-Kraft-Schweiger: Lehrbuch der Mathematik, 4. Band*; Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1981; S. 20

Die im Lösungsheft angegebene Zahl von 14,002 ist also richtig. Demzufolge muß die Rechnung falsch sein.

(2) Überprüfen der Teilintegrale:

Nun müssen die Teilintegrale auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Am besten wäre es, den gesamten Weg soweit als möglich zu variieren, um nicht Denkfehler, die während der Rechnung gemacht wurden, trotz DERIVE zu wiederholen. Hier erweist es sich als zweckmäßig, die Teilintegrale ohne irgendeine Vereinfachung berechnen zu lassen.
Da sie sich bereits im Speicher befinden, ist dies sehr leicht durchzuführen:

(S)implify #3 <ENTER>
DERIVE liefert den Wert 72/5 - der Faktor $\sqrt{6}$ fehlt. Eine kurze Überprüfung der Rechnung ergibt: Der Einfachheit halber wurde der Faktor $\sqrt{6}/6$ vor das Integral gezogen, um dieses einfacher berechnen zu können. Allerdings wurde er im Endergebnis nicht mehr berücksichtigt, sondern direkt die Lösung der Nebenrechnung für das Integral eingesetzt.
Die Korrektur ist nun relativ einfach. Die korrekte Flächenformel lautet:

$$A = 2 \times \left| 72\frac{\sqrt{6}}{5} \times \frac{\sqrt{6}}{6} - 7{,}391 \right| = 2 \times | 14{,}4 - 7{,}391 | = 14{,}018 \text{ (AE)}$$

IV. Ein Teilaspekt der Differentialrechnung: Das Newton'sche Näherungsverfahren

Eine weitere wichtige Anwendung von DERIVE liegt in der Kurvendiskussion. Hierbei spielt nicht nur die relativ leichte Handhabung der Ableitungsfunktionen eine Rolle, sondern auch die grafische Ausgabe. Da DERIVE aber in der Version 1.22 noch keine Iterationsfunktion beinhaltete, ist es nicht möglich, einen Teilaspekt der Differentialrechnung, der in der 7. Klasse AHS behandelt wird, zu bearbeiten, nämlich das Newton'sche Näherungsverfahren. Dieses Verfahren zur näherungsweisen Berechnung reeller Nullstellen von Funktionen - auf die theoretischen Hintergründe möchte ich hier nicht näher eingehen - basiert auf folgender Iterationsfunktion:

$$x_{n+1} = x_n \quad \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Berechnung der Ableitung ließe sich unter DERIVE zwar realisieren, die Iteration selbst müßte aber relativ aufwendig über

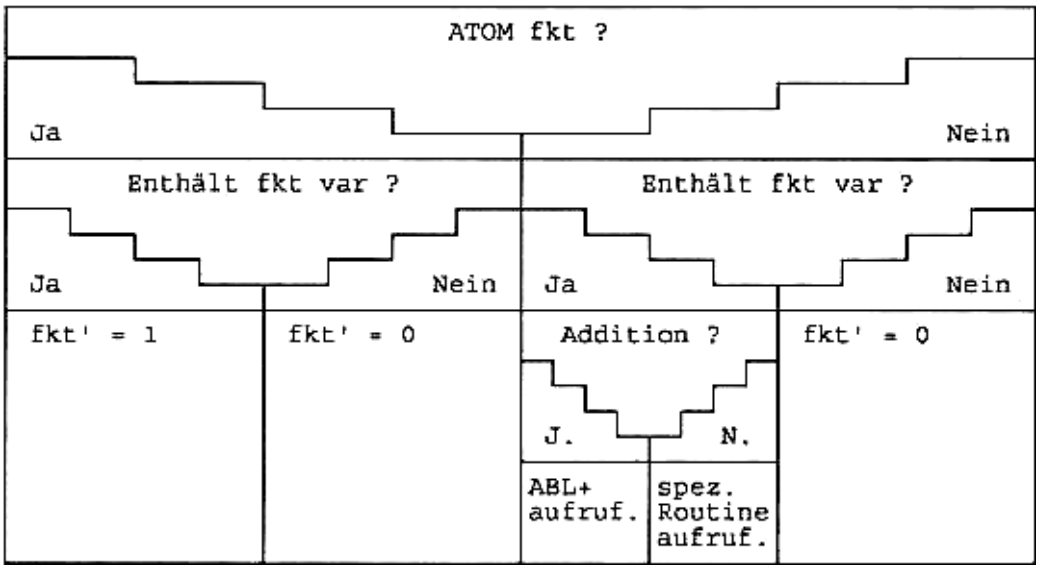
(M)anage (S)ubstitute

berechnet werden. Aus diesem Grund machte ich vor einem Jahr einen bescheidenen Versuch, das Paket DERIVE mit einem Teilprogramm zu erweitern. Als Programmiersprache drängte sich muLISP '87 aus mehreren Gründen förmlich auf:

- Zur symbolischen Differentiation ist eine funktionale Programmiersprache natürlich besser geeignet als eine prozedurale.
- Im Informatikunterricht hatten wir von Prof. Fuchs gerade eine Einführung in diese Sprache erhalten und sollten im Rahmen einer Projektarbeit ein Programm erstellen.
- Das Programm DERIVE ist selbst in muLISP geschrieben. Außerdem ist die Benutzeroberfläche, wie sie DERIVE verwendet, direkt vom muLISP-Entwicklungssystem aus programmierbar.

Die Umsetzung erwies sich als relativ einfach. Die Differentiation einer Funktion, die natürlich vom Computer durchgeführt werden mußte, um dem Benutzer nicht unnötige Rechenarbeit aufzubürden, konnte als Summe von kleinen Teilroutinen realisiert werden, die von der Stammroutine DIFF aufgerufen wurden, die folgende Gestalt besaß:

DIFF (fkt var)



Die Addition mußte deshalb als Sonderfall behandelt werden, da es in muLISP möglich ist, bei Summen beliebig viele Summanden anzugeben und da man davon auch relativ oft Gebrauch macht, man denke nur an die gesamte Klasse der Polynomfunktionen. Alle anderen Funktionen dürfen aus Gründen der Einfachheit nur maximal zwei Argumente enthalten.

Der Aufruf der anderen Funktionen selbst erfolgt mit einem kleinen Trick, der eine ganze Reihe von WENN-DANN-Abfragen vermeidet. Er wurde in LISP folgendermaßen codiert:

```
(eval
 (list
  (pack (LISTCONS3) '(A B L) (car fkt)))
  (list 'QUOTE var)
  (list 'QUOTE fkt)))
```

Es handelt sich dabei um eine Art selbstmodifizierendes Programm, da der Name der aufzurufenden Routine aus dem Parameter fkt extrahiert wird, da das Rechensymbol in fkt immer an erster Stelle (an der CAR-Position) stehen muß.
Die Differentiationsroutinen selbst gehen dann immer von der komplexesten Möglichkeit aus, d.h. sie nehmen an, daß als Argumente für "ihre" Operation selbst wieder differenzierbare Funktionen vorliegen. Daher differenzieren sie nach folgenden Regeln:

Funktion	Ableitung
f(x) + g(x)	f'(x) + g'(x)
f(x) - g(x)	f'(x) - g'(x)
f(x) · g(x)	f'(x) · g(x) + f(x) · g'(x)
f(x) / g(x)	[f'(x) · g(x) - f(x) · g'(x)] / g2(x)
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$ · f'(x)
$f(x)^{g(x)}$	$[f(x)^{g(x)}]$ [g(x)f'(x)/f(x)+g'(x)ln f(x)]
sin f(x)	f'(x) · cos f(x)
cos f(x)	-f'(x) · sin f(x)
tan f(x)	[sin f(x) / cos f(x)]'
cot f(x)	[1 / tan f(x)]'
ln f(x)	f'(x) / f(x)
g(x)log f(x)	[ln f(x) / ln g(x)]'
arcsin f(x)	f'(x) / [cos arcsin f(x)]
arccos f(x)	-f'(x) / [sin arccos f(x)]
arctan f(x)	f'(x) / [f2(x)+1]
arccot f(x)	-f'(x) / (f2(x)+1]

Hier liegt auch die notwendige Rekursion "begraben", da die einzelnen Differentiationsroutinen die Routine DIFF wieder aufrufen. Als Abbruchbedingung fungiert die Abfrage auf ATOM in der Routine DIFF.
Das Problem bei dieser Art von Differentiation liegt in der gigantischen Datenmenge, die die Ableitung bildet. Die Ableitung von

$$\ln 3 \cdot [x^5 - (x+3)^{12}]$$

ergibt nach den oben genannten Regeln

3) Die Funktion LISTCONS wurde von mir erstellt, da ich damals noch nicht den gesamten Befehlsvorrat von muLISP kannte. Sie hat die Funktion, zwei Listen zu einer einzigen zu verbinden, ohne Unterlisten zu erzeugen.

$0 \cdot (x^5-(x+3)^{12}) + [\ln 3 \cdot (5 \cdot x^{5-1} \cdot 1 - 12 \cdot (x+3)^{12-1} \cdot [1+0])]$
Die einfache Lösung wäre aber

$\ln 3 \cdot [5x^4 - 12(x+3)^{11}]$

Diese komplizierte Darstellung liegt in der allgemeinen Verarbeitung der abzuleitenden Funktionen durch DIFF. Da auch einfache Teile wie $(x+3)$ vollständig als Funktion abgeleitet werden (man erhält $1+0$), wird der Ausdruck verkompliziert. Ein Teil dieses unnötigen "Ballastes" wird durch die Funktionsgruppe SIMPLIFY entfernt. In den sechs SIMPLIFY-Routinen werden "redundante" Operationen, wie zum Beispiel die Multiplikation mit 0 oder 1 oder das Potenzieren einer Funktion mit -1, 0 oder 1, entfernt. Dadurch erreicht man einen gewissen Vereinfachungsgrad, der aber immer noch weit vom Optimum entfernt ist. Allerdings ist das Ergebnis auch nicht zur Ausgabe bestimmt (zum Differenzieren hat man ja DERIVE), sondern dient nur als Zwischenprodukt zur Ermittlung der Iterationsformel.
Bei der Berechnung selbst ergibt sich nur noch ein Problem, nämlich die Berücksichtigung der Definitionsmengen. Da nicht alle erlaubten Funktionen über dem gesamten Bereich der reellen Zahlen definiert sind, die Eingabe des Startwerts aber beliebig erfolgen kann, ist es möglich, daß eine Operation ein Argument erhält, das außerhalb der Definitionsmenge liegt. Um den Programmabbruch und die Ausgabe einer Fehlermeldung zu vermeiden, wurde hier ein kleiner Kunstgriff angewandt, der zwar zugegebenermaßen vom mathematischen Standpunkt aus auf sehr wackeligen Beinen steht, aber durchaus seinen Zweck erfüllt: Das Ergebnis einer "verbotenen" Rechnung wird einfach gleich 1 gesetzt. Dadurch nähert man sich zwar nicht gerade der Nullstelle der Funktion, aber im allgemeinen bringt man den Rechenwert wieder in einen definierten Bereich.

Im praktischen Einsatz stellte das Programm NEWTON eine durchaus sinnvolle Erweiterung von DERIVE dar. Bei geeigneter Wahl des Startwerts versagte das Programm bei keiner der Beispielfunktionen, die im Rahmen des Mathematikunterrichts zu lösen waren, was indirekt natürlich auch eine Bestätigung des Kunstgriffs für Definitionslücken darstellt.

V. DERIVE und die Erstellung einer Fachbereichsarbeit

Neben den bisher erwähnten Problemstellungen in der Mathematik leistete das Programm DERIVE auch entscheidende Hilfestellungen bei Problemen aus anderen naturwissenschaftlichen Fächern.
Im Rahmen eines Schulversuchs erhielt ich die Möglichkeit, eine Fachbereichsarbeit entsprechend der 11. Novelle des Schulorganisationsgesetzes zu schreiben. Ich entschied mich für die fächerübergreifende Thematik radioaktiver Zerfallsprozes-

se. Im Rahmen der Fachbereichsarbeit wollte ich nicht nur die theoretischen Grundkenntnisse aus Chemie bzw. Physik vermitteln, sondern auch ein Werkzeug zur kinetischen Simulation radioaktiver Zerfallsprozesse liefern. In diesem Zusammenhang hatte ich natürlich einige theoretisch Vorarbeiten zu leisten. Dazu gehörte die Entwicklung eines kontinuierlichen Modells für ein- und zweistufige Zerfallsprozesse[4].
Während der einstufige Prozeß zum "Standardrepertoire" eines Chemikers gehört - man erhält die klassische Zerfallskurve der Gestalt $N(t)=N_0 \cdot e^{-kt}$ -, bewegte ich mich für die Herleitung mehrstufiger Zerfallsprozesse auf mathematischem Neuland. In den mir zur Verfügung stehenden Quellen war nirgends eine solche Herleitung zu finden, sodaß ich die auftretenden Differentialgleichungen selbst lösen mußte. Dabei war DERIVE eine entscheidende Hilfe. In der Praxis ging ich dabei wie folgt vor:

AUFSTELLEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Aus den Gesetzen für den radioaktiven Zerfall erhielt ich folgende Fakten:
- Die Zerfallsrate eines radioaktiven Nuklids ist nur von der Anzahl der vorhandenen Atome des betreffenden Nuklids abhängig.
- Die Anzahl der Atome des Zwischenprodukts bei einem zweistufigen Zerfall ist sowohl von der Zerfallsrate dieses Zwischenprodukts, als auch von der Neubildung des Zwischenprodukts durch Zerfall des Ausgangskerns abhängig.

Mathematisch ausgedrückt, erhielt ich folgende Differentialgleichungen[5]:

$$(1)\ \frac{da}{dt} \quad -k \times a$$

$$(2)\ \frac{db}{dt} = \frac{da}{dt} - 1 \times b$$

LÖSENEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MITTELS DERIVE

Da ich leider bis jetzt noch keine Möglichkeit gefunden habe, die Differentialgleichungen in DERIVE einzugeben und direkt lösen zu lassen, mußte ich die Gleichungen vorher noch umformen.
Dieses Vorhaben erwies sich als relativ einfach. Da die Lösung der ersten Gleichung mit der typischen Exponentialfunktion bereits vorgegeben war, mußte ich dere Ableitung - eben den Quotienten da/dt - nur mehr in die zweite Gleichung einsetzen.

---

4) Unter zweistufigen Zerfallsprozessen verstehe ich Zerfallsreihen, bei denen durch den Zerfall eines radioaktiven Stoffes ein weiterer radioaktiver Stoff entsteht. Aus einem Ausgangskern wird also erst über eine Zwischenstufe der Produktkern.

5) vgl. MEISL, Christian: *Radioaktive Zerfallsprozesse: Erarbeitung der theoretischen Grundlagen und diskrete Modellierung unter Zuhilfenahme eines MS-DOS-kompatiblen Rechners*; FBA; Hallein: BG/BRG Hallein, 1992, S. 15ff.

Dadurch erhielt ich eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \times y + g(x)$$

Durch Nachschlagen in einem mathematischen Lexikon[6] - leider habe ich im Mathematikunterricht das Lösen von Differentialgleichungen nie gelernt - erhielt ich die Lösungsformel

$$\left[\int \frac{g(x)}{e^{\int f(x)\,dx}}\,dx + C \right] \times e^{\int f(x)\,dx}$$

Über *(M)anage (S)ubstitute* war in DERIVE nun die Berechnung der Lösung relativ einfach. DERIVE lieferte auch prompt das Ergebnis

$$b(t) = \frac{k \times a_0}{k - 1} \times (e^{-lt} - e^{-kt})$$

BERECHNUNG DES GRENZWERTS FÜR k = l

Da diese Funktion nur für k< >l definiert ist, mußte für k=l noch der Grenzwert berechnet werden. DERIVE lieferte nach nicht ganz einer Sekunde Wartezeit das Ergebnis

$$b^*(t) = a_0 \cdot k \cdot t \cdot e^{-kt}$$

Welche Erleichterung mir DERIVE in diesem Fall beschert hatte, merkte ich, als ich aus Gründen der mathematischen Beweisführung den Grenzübergang nachvollziehen wollte. Dieses kleine Detail sollte nämlich neben der Entwicklung des Computerprogramms der zeitaufwendigste Teil meiner Fachbereichsarbeit werden. Ich saß nicht weniger als drei Wochen an der Lösung, bis mir der Lösungsweg in allen Einzelheiten klar war:
Ich weiß nicht, wie DERIVE zur Lösung gelangt, aber ich mußte

- den Grenzwert in einen Grenzwert gegen Unendlich umwandeln,
- einige Grenzwertsätze anwenden,
- die Exponentialfunktion durch ihre Reihendarstellung ersetzen,
- zwei Summanden abspalten und
- die auftretenden Nullfolgen eliminieren.

6) In diesem Fall: BARTSCH, Hans-Jochen: *Taschenbuch mathematischer Formeln*; 3. - 6. Auflage; Thun [u.a.]: Harri Deutsch, 1982

Die Beweisführung, die in DERIVE schlicht mit *(C)alculus (L)imit* erfolgte, nimmt in der eigentlichen Fachbereichsarbeit - auch hier werden nur die grundlegenden Ideen hinter der Beweisführung beleuchtet - ganze zwei DIN A4-Seiten ein. Hier tritt ein Vorteil von DERIVE deutlich hervor: Man kann Berechnungen durchführen, ohne unnütze Zwischenergebnisse berechnen zu müssen.

VI. DERIVE und "fachfremde" Probleme

Bisher habe ich eigentlich nur mathematische Probleme behandelt. DERIVE ist aber auch ein sinnvolles Hilfsmittel, das zusätzlich zum Taschenrechner in anderen Wissenschaftszweigen - in meinem Fall ist es die Chemie - verwendet werden kann. Es dient hier als Hilfestellung bei Problemen, die mit dem Taschenrechner nicht mehr zu lösen sind, aber auf deren Berechnungsweg es nicht primär ankommt. Im folgenden möchte ich zwei charakteristische Beispiele anführen:

CHEMISCHES GLEICHGEWICHT

Ein Typ von "Standardaufgaben" in der allgemeinen und physikalischen Chemie besteht vom Angabentext her aus der einfachen Formulierung:
"Berechnen Sie den pH-Wert einer x-molaren Lösung der Säure Y!"

Kritisch wird es, wenn diese Lösung exakt verlangt ist, da man bei solchen Aufgaben grundsätzlich nur Näherungslösungen berechnet, die geringe Konzentrationen vernachlässigen, um den Rechenablauf zu vereinfachen.
Ein Beispiel für eine solches Problem stellt die folgende Aufgabe dar:

"Wie groß ist der pH-Wert einer 0,1-molaren Essigsäure?"

Die theoretischen Hintergründe will ich hier nicht näher beleuchten, es sei nur gesagt, daß diese Aufgabenstellung zu folgendem Gleichungssystem führt:

(1) $K_W = 10^{-14} = c(H^+) \times c(OH^-)$

(2) $K = 1{,}74 \times 10^{-5} \quad \dfrac{c(H^+) \times c(CH_3COO^-)}{c(CH_3COOH)}$

(3) $c(H^+) = c(OH \quad + c(CH_3COO \quad)$

4) $0, \quad = c(CH_3COOH) + c(CH_3COO$

In diesem Gleichungssystem sind K_W und K Konstanten, die aus einem Nachschlagewerk ermittelt wurden[7]. Außerdem gibt die Variable c(X) die Konzentration des Stoffes X in $moll^{-1}$ in der Lösung an.
Nach Einsatz von DERIVE erhält man über einige Umformungen den Ausdruck

$$- a^3 - K \cdot a^2 + (K_W + K \cdot 0{,}1)a + K_W K = 0$$

Nun setzt man für die Konstanten die entsprechenden Werte ein. Die entstehende Gleichung dritten Grades

$$- a^3 - 1{,}74 \cdot 10^{-5} \cdot a + 1{,}74 \cdot 10^{-6} \cdot a + 1{,}74 \cdot 10^{-19} = 0$$

kann mein Taschenrechner lösen. Eine weitere Lösungsmöglichkeit würde mein oben besprochenes Newton'sches Näherungsverfahren - DERIVE konnte ich die Lösung nicht entlocken - darstellen. Das setzt allerdings eine gewisse Erfahrung mit den zu erwartenden Lösungen voraus, da die Lösungen, wenn sie alle drei reell sind, wahrscheinlich ziemlich nahe beisammen liegen.
Diese Vermutung bestätigt sich, die Lösungen sind

$a_1 = -9{,}79 \cdot 10^{-14}$ (mol/l)
$a_2 = -1{,}33 \cdot 10^{-3}$ (mol/l)
$a_3 = 1{,}31 \cdot 10^{-3}$ (mol/l)

Da aber eine Konzentration nie negativ sein kann, ergibt sich als einzige sinnvolle Lösung der Wert von $1{,}31 \cdot 10^{-3}$ mol/l für die Wasserstoffionenkonzentration.
Über die Umrechnungsformel

$$pH = - \lg \mid c(H^+ \quad ^{8)}$$

ergibt sich ein pH-Wert von 2,89.

In Summe vermindert sich die Rechenzeit um ca. 90%, da die komplizierten Umformungen und Substitutionen zur Ermittlung der kubischen Gleichung wegfallen bzw. von DERIVE erledigt werden.

ANALYSE EINER LEGIERUNG

Ein weiterer Typ von mathematischen Problemen taucht immer dann auf, wenn in einem Beispiel aus der anorganischen Chemie eine Metallegierung zu analysieren ist. Ohne hier näher auf die zugrundeliegende Problematik einzugehen, möchte ich nur kurz den Rechenweg veranschaulichen. Bei der Lösung derartiger Probleme

---

7) vgl. CHRISTEN, Hans Rudolf: *Struktur und Energie: eine Einführung in die allgemeine Chemie*; 1. Aufl.; Frankfurt am Main, Berlin, München: Diesterweg/Salle; Aarau, Frankfurt am Main, Salzburg: Sauerländer, 1980; S. 498
8) Die Betragsstriche sind notwendig, da man aus einer Größe (mit Einheit) logischerweise keinen Logarithmus ziehen kann.

erhält man nämlich je nach Anzahl der Metalle, die legiert werden, ein System von linearen Gleichungen. Diese können in DERIVE einfach als Vektor eingegeben und über So(L)ve gelöst werden.
Dies soll am Beispiel des folgenden Systems kurz erläutert werden:

```
I:   5a - 2b +  c = -23
II:   a + 9b -  c =   0
III: -a -  b + 5c =  10
```

Dieses System wird in DERIVE als
[5a-2b+c=-23, a+9b-c=0, -a-b+5c=10]
eingegeben. Nach *So(L)ve* erhält man

$$[a = \frac{-541}{118},\ b = \frac{38}{59},\ c = \frac{143}{118}]$$

Ohne sich mit irgendwelchen Lösungsverfahren herumzuplagen, erhält man so die Lösungen. Dabei verfehlt man auch nicht den Sinn solcher Rechnungen, da es in der Chemie vor allem auf das richtige Aufstellen der Gleichungen - man erhält sie aus stöchiometrischen, elektrochemischen und gravimetrischen Überlegungen - ankommt. Die Lösung der Gleichungen kann man ohne Bedenken dem Computer überlassen.

VII. Schlußbemerkungen

An den Schluß meines Beitrags möchte ich ein Zitat von Hans Bauer stellen:
"Wenn es nicht notwendig ist, einen Computer zu verwenden, dann ist es notwendig, keinen Computer zu verwenden."[9)]
Diese Zitat faßt in einem Satz sämtliche relevante Überlegungen zusammen, die ein Lehrer bzw. Schüler anzustellen hat, will er den Computer im Unterricht verwenden. Der Computer soll nicht den Unterricht dominieren, den Schüler in einem solchen Ausmaß fesseln, daß er die eigentlichen Problematiken aus den Augen verliert, sondern er soll Hilfsmittel sein. In dieser Verwendung stellt er zusätzlich zum Taschenrechner eine durchaus sinnvolle Ergänzung dar. Diese Ergänzung beschränkt sich dabei nicht auf den Bereich der Mathematik, sie kann vielmehr in fast allen Unterrichtsfächern verwendet werden, und sei es nur zur Aufbereitung bzw. grafischen Auflockerung von Handreichungen. In diesem Sinn hoffe ich auch in der Zukunft auf intelligente und innovative Softwareprodukte, die auch in ihrer Preislage auf das Budget eines Schülers zugeschnitten sind und für die DERIVE - im besonderen in der neuesten Version - ein durchwegs gut gelungenes Beispiel darstellt.

---

9) BAUER, Hans: "Was heißt und zu welchem Ende betreibt man ITG?", *Mitteilungen des Philologenverbandes Rheinland-Pfalz*, 2/88